Grundzüge von Algorithmen und Datenstrukturen, WS 15/16: Lösungshinweise zum 12. Übungsblatt

Markus Bläser

Aufgabe 12.1 (a) $T(n) = 8T(n/2) + 4, T(1) = 1$. Nach dem Master-Theorem ist $T(n) = O(n^3)$. Das ist asymptotisch die gleiche Laufzeit wie bei der naiven Matrizenmultiplikation.

(b) $a(f-h) + (a+b)h$ liefert $af + bh$ (1 Addition). $(c+d)e + d(g-e)$ liefert $ce + dg$ (1 Addition). Weiter ist

$$(a+d)(e+h) + (b-d)(g+h) = ae + bg + \underbrace{ah + bh}_{(a+b)h} + \underbrace{de - dg}_{-d(g-e)}.$$

Damit ist auch $ae+bg$ erledigt (3 Additionen/Subtraktionen). Um nun noch $cf+dh$ zu erhalten, berechnen wir

$$-(a-c)(e+f) - (b-d)(g+h) = cf + dh + ce + dg - af - bh - ae - bg$$

(1 Addition). Da wir $ce+de$ zur Verfügung haben, können wir ce durch $-de$ ersetzen, indem wir $ce + de$ subtrahieren (1 Subtraktion). Außerdem können wir $-bh$ durch ah ersetzen, indem wir $ah + bh$ addieren (1 Addition). Das ergibt

$$-(a-c)(e+f) - (b-d)(g+h) = cf + dh \underbrace{-de + dg}_{d(g-e)} \underbrace{-af + ah}_{-a(f-h)} -ae - bg.$$

Da wir $ae+bg$ schon berechnet haben, liefert uns das $cf+dh$ (3 Additionen/Subtraktionen).

(c) $T(n) = 7T(n/2) + 11, T(1) = 1$. Nach dem Master-Theorem ist $T(n) = O(n^{\log_2 7}) \approx O(n^{2.81})$.

(d) Wenn n ungerade ist, ersetzen wir A durch die $((n+1) \times (n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$ und B analog. Rekursion für die Laufzeit ist nun $T(n) = 7T(\lceil n/2 \rceil) + 11$, was wieder $T(n) \approx O(n^{2.81})$ ergibt.