Grundzüge von Algorithmen und Datenstrukturen, WS 15/16: Lösungshinweise zum 10. Übungsblatt

Markus Bläser

Aufgabe 10.1 Beobachtung: Statt dem Durchschnittswert kann man auch die Summe der Punkte maximieren.

Es sei $P(a,b)$ die Summe der Punkte die man maximal erreicht, wenn man b Stunden auf die ersten a Klausuren verwendet für $1 \leq a \leq n$ und $0 \leq b \leq h$. Es gilt $P(1,b) = f_1(b)$. Für $a > 1$ gilt: $P(a,b) = \min\{P(a-1,c) + f_a(b-c) \mid 0 \leq c \leq b\}$.

Speichert man zu jeden $P(a,b)$ noch ein c, für das das Minimum angenommen wurde, so kann man auch die Anzahl der Stunden rekonstruieren.

Aufgabe 10.2 a) Eigentlich gar nicht.

b) Eine Menge heisst stark zusammenhängend, wenn die erste Bedingung von starker Zusammenhangskomponenten erfüllt ist. Wir zeigen: Sind A und B zusammenhängend und gibt es ein $s \in A \cap B$, dann ist $A \cup B$ stark zusammenhängend. Daraus folgt die Behauptung. Seien $x, y \in A \cup B$. Dann gibt es einen Pfad von x nach s (jeweils in A oder B) und einen Pfad von s nach y. Beides zusammen ist ein Pfad von x nach y in $A \cup B$. Ebenso konstruiert man den Pfad von y nach x.

c) Mache in BFS ausgehend von s. Man erhält alle Knoten, die von s erreichbar sind. Drehe im Graph nun alle Kanten um. Mache eine BFS ausgehend von s im neuen Graph. Man erhält alle Knoten, von denen aus s erreicht werden kann. Der Schnitt beider Mengen ist die starke Zusammenhangskomponente. Die Laufzeit ist $O(|V| + |E|)$. Will man alle Komponenten finden, so geht dies auch in Linearzeit, siehe z.B. Kosarajus Algorithmus.

Aufgabe 10.3 Sei $H = (U, F)$, wobei $U = \{(u,v) \in V^2 \mid u \text{ und } v \text{ haben Abstand mindestens } r\}$ und $F = \{(u,v),(u',v') \mid ((u,u') \in E \vee (u = u')) \wedge ((v,v') \in E\ vee (v = v'))\}$. Mit DFS oder BFS kann man testen, ob es einen Pfad von (s_1, s_2) nach (f_1, f_2) in H gibt. Falls ja, so korrespondiert dieser Pfad zu einem Schema. Umgekehrt lässt sich jedes Schema in so einen Pfad übersetzen. (Beweis per Induktion über die Pfadlänge bzw. Schemalänge.)

Die Knotenmenge von U kann man konstruieren, in dem man für jeden Knoten in V einmal BFS macht und so alle Knoten findet, die mindestens Abstand r haben. F kann man denn in Zeit $|U|^2$ finden. Dies dominiert die Laufzeit, die insgesamt $O(n^4)$ ist.

Man kann natürlich statt zwei Komponenten viele Komponenten nehmen, aber der Exponent wächst natürlich entsprechend.