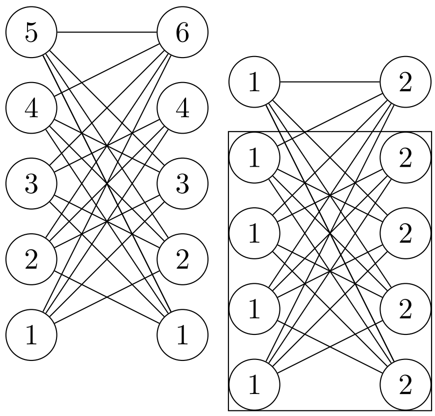
Grundzüge von Algorithmen und Datenstrukturen, WS 15/16: Lösungshinweise zum 9. Übungsblatt

Markus Bläser

Abbildung 1



(a) 6 Farben (b) 2 Farben

Aufgabe 9.1 In Abbildung 1 ist die Box ein vollständiger bipartiter Graph ohne Kanten zwischen gegenüberliegenden Knoten. Die Knoten werden von unten nach oben abgearbeitet, Knoten auf gleicher Höhe nacheinander in beliebiger Reihenfolge.

Beide Graphen lassen sich natürlich verallgemeinern. In Abbildung 2a können wir sehen, wie wir $\lfloor \frac{10-2}{2} \rfloor + \chi(G)$ Farben brauchen. $\chi(G)$ ist hier die chromatische Zahl, die Anzahl der Farben die man mindestens braucht. Allgemein lässt sich der Graph im Kasten mit $2n - 2$ Knoten erschaffen.

Aufgabe 9.2 $T(i, k) = 1$ falls man mit den Zahlen $x_1, \ldots, x_i$ die Zahl k darstellen kann und 0 sonst. Es gilt $T(1, k) = 1$, falls $k = 0$ oder $k = x_1$ und 0 sonst. Für $i > 1$ gilt

$$T(i, k) = T(i - 1, k) \vee T(i - 1, k - x_i)$$

wobei der zweite Term nur vorkommt, wenn $k - x_i \geq 0$.

Obige Gleichung erlaubt es die Tabelle spaltenweise zu füllen. Pro Eintrag ist konstante Arbeit nötig. Das ergibt eine Laufzeit von $O(nN)$.

Aufgabe 9.3 a) Wir betrachten erst einmal nur die Münzen bis 50 Cent.

Sei m der auszuzahlende Betrag. Wenn $m < 5$, ist der Algorithmus optimal.

Ist $5 \leq m < 10$, so wählt der Algorithmus eine 5-Cent-Münze. Dies muss aber auch in der optimalen Lösung genommen werden. Ist der Betrag ungerade, so wäre sonst eine 1-Cent-Münze in der optimalem Lösung. Zusammen mit weiteren Münzen könnte diese durch ein 5-Cent-Stück ersetzt werden, ein Widerspruch. Ist der Betrag gerade, d.h. 6 und 8, so könnte der Betrag auch nur durch 2-Cent-Münzen dargestellt werden. Dies ist aber nicht optimal (Ausprobieren!).

Wenn $10 \leq m < 20$, wählt der Algorithmus eine 10-Cent-Münze. Jede Lösung ohne diese würde mehr Münzen verwenden. Eine optimale Lösung ohne 10-er kann maximal einen 5-er, zwei 2-er und einen 1-er enthalten. Dies wären aber gerade wieder 10 Cent und könnten durch einen 10-er dargestellt werden.

Wenn $20 \leq m < 50$, wählt der Algorithmus eine 20-Cent-Münze. Jede Lösung ohne diese muss entweder mindestens 2 10-Cent-Münzen benutzen oder eine 10-Cent-Münze und mindestens 10-Cent anders darstellen. Zwei 10-Cent-Münzen kann man gegen einen 20-er eintauschen. 10 Cent, die mit kleineren Münzen dargestellt werden kann man aber wieder wie oben in einen 10-er eingetauscht werden.

Sei nun $m \geq 50$. Wir zeigen, dass eine 50er auszuwählen optimal ist, indem wir in eine beliebige Lösung ohne 50er einen 50er eintauschen, ohne die Münzenzahl zu erhöhen. 1. Fall: es gibt mindestens 3 20er. Dann ersetzen wir diese 3 Münzen durch einen 50er und einen 10er. 2. Fall: es gibt genau 2 20er. Dann gibt es noch mindestens einen 10er oder 10-Cent lassen sich anders darstellen, da $m \geq 50$. In jedem Fall können wir eine gewisse Anzahl von Münzen auswählen, die den Wert 50 ergibt und diese durch einen 50er ersetzen. Man kann sich überlegen, dass dies auch gilt, wenn genau 1 20er oder gar kein 20er vorhanden ist.

b) Münzwerte: $1, 3, 4$. Der Betrag 6 wird optimal als $3 + 3$ aufgeteilt, Greedy nimmt aber $4 + 1 + 1$.