Grundzüge von Algorithmen und Datenstrukturen, WS 15/16: Lösungshinweise zum 7. Übungsblatt

Markus Bläser

Aufgabe 7.2 Wir nennen die Bäume, die die Bedingung aus der Aufgabe erfüllen, AVL'-Bäume. Sei X_h definiert durch $X_0 = 1$, $X_1 = 2$, $X_2 = 4$ sowie

$$X_h = X_{h-1} + X_{h-3}$$

für alle $h \geq 3$. Die Folge (X_h) ist offentsichtlich mononton.

Wir behaupten, dass jeder AVL'-Baum der Höhe h mindestens X_h viele Knoten hat. Das ist für $h = 1, 2, 3$ richtig. Sei $h > 3$. Sei T ein AVL'-Baum der Höhe h. Seien T_1 und T_2 die beiden Teilbäume. Dann hat o.B.d.A. T_1 die Höhe $h - 1$ und T_2 mindestens die Höhe $h - 3$. Nach Induktionsvoraussetzung hat damit T_1 mindestens X_{h-1} Knoten und T_2 mindestens X_{h-3} Knoten. Damit hat T mindestens $X_{h-1} + X_{h-3} = X_h$ viele Knoten. (Sogar einen mehr, aber den schenken wir uns.)

Wir zeigen nun, dass X_h exponentiell wächst. Man kann einfach per Induktion zeigen: $X_h \geq 1.4^h$. Das ist bestimmt richtig für $h = 0, 1, 2$. Aus der Induktionsannahme erhält man

$$X_h = X_{h-1} + X_{h-3} \geq 1.4^{h-1} + 1.4^{h-3} = 1.4^h(1.4^{-1} + 1.4^{-3}) \geq 1.4^h.$$

Die letzte Ungleichung gilt, das man leicht $1.4^{-1} + 1.4^{-3} \geq 1$ nachrechnet. Das optimale c erhält man als Lösung von $1/c + 1/c^3 = 1$ bzw. $c^3 - c^2 - 1 = 0$. Das ist im übrigen das charakteristische Polynom von M, weiter unten definiert.

Alternativ kann man folgenden Ansatz wählen. Es gilt

$$\begin{pmatrix} X_h \\ X_{h-1} \\ X_{h-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{h-1} \\ X_{h-2} \\ X_{h-3} \end{pmatrix}$$

Per Induktion folgt

$$\begin{pmatrix} X_h \\ X_{h-1} \\ X_{h-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{h-2} \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix}$$

Schreibe dies als $v_h = M^{h-2} v_2$, wobei die v_h die entsprechenden Vektoren und M die 3×3-Matrix ist. Bringe M auf Jordansche Normalform, $M = S^{-1} J S$. Man erhält

$$S v_h = J^{h-2} S v_2.$$

Schreibt man $w_h := Sv_h$, so erhält man:

$$w_h = J^{h-2} w_2.$$

Aus den Eigenwerten kann man das Wachstum ablesen. Da M einen reellen Eigenwert (≈ 1.46) hat und zwei konjugierte komplexe, ist es evtl. schöner, nicht die Jordansche Normalform zu wählen, sondern eine reelle Matrix mit 1×1- oder 2×2-Blöcken auf der Diagonalen.