



4. Übungsblatt zu Grundzüge von Algorithmen und Datenstrukturen, WS 15/16

Prof. Markus Bläser

<http://www-cc.cs.uni-saarland.de/course/50/>

Abgabe: 19. November 2015, 12:00 Uhr

Aufgabe 4.1 a) Geben Sie ein Sortierverfahren an, das ein Array $a[1..n]$ sortiert, das nur Nullen und Einsen als Inhalt hat. Achten Sie darauf, dass das Sortierverfahren *stabil* ist. Ein Sortierverfahren heißt *stabil*, wenn für alle $i < j$ gilt: Gilt vor dem Sortieren $a[i] = a[j]$ und sind i' und j' die Positionen, an denen sich $a[i]$ bzw. $a[j]$ nach dem Sortieren befindet, so ist $i' < j'$.

b) Seien nun in $a[1..n]$ Zahlen mit b Bits in der Binärdarstellung gespeichert. Benutzen Sie Teil a), um ein Sortierverfahren konstruieren, indem Sie die Zahlen zuerst nach Ihrem niederwertigstem Bit, dann nach dem zweit-niedrigsten Bit, usw. sortieren. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens und schätzen Sie die Laufzeit ab.

Sie dürfen annehmen, dass es eine Funktion $\text{Bit}(z, i)$ gibt, die das i -te Bit einer Zahl z liefert.

c) Was passiert, wenn Sie stattdessen mit dem höchsten Bit anfangen?

Aufgabe 4.2 In einem nach dem K.-o.-System ausgetragenen Turnier wird mit $n - 1$ Spielen der beste Spieler ermittelt. Da bereits im ersten Spiel der zweitbeste gegen den besten ausscheiden kann, muss der im Finale unterlegene Spieler nicht der zweitbeste Turnierteilnehmer sein.

a) Beseitigen Sie diese Ungerechtigkeit! Gegeben sei eine Menge von $n = 2^m$ Elementen, $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$. Geben Sie einen Algorithmus an, der das größte *und* das zweitgrößte Element der Menge mittels

$$n - 2 + \log(n - 1)$$

Vergleichen findet.¹

b) (4 Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass dies im Comparison-Tree-Modell optimal ist.

c) Verallgemeinern Sie Ihren Algorithmus, so dass er die t größten Elemente mit

$$n - t + t \log(n - 1)$$

Vergleichen findet.²

d) Welche Laufzeit erhalten Sie, wenn man den Algorithmus aus der vorherigen Teilaufgabe zum Sortieren verwendet?

¹Das sogenannte Doppel-K.-o.-System hingegen benötigt mindestens $2n - 2$ Spiele, um den besten *und* den zweitbesten Spieler zu bestimmen.

²Man kann sogar $n - t + \sum_{n+1-t < j \leq n} \log(j - 1)$ erreichen.

- Aufgabe 4.3** a) Geben Sie einen Algorithmus an, der mit $O(n \log n)$ Vergleichen entscheidet, ob ein Array $a[1..n]$ (mindestens) ein Element mehrfach enthält.
- b) Erweitern Sie das Comparison-Tree-Modell derart, dass Vergleiche nun drei Ergebnisse haben: kleiner, gleich und größer. Zeigen Sie, dass der Algorithmus aus a) in diesem Model asymptotisch optimal ist.