1. Übungsblatt zu Grundzüge von Algorithmen und Datenstrukturen, WS 15/16

Prof. Markus Bläser
http://www-cc.cs.uni-saarland.de/course/50/

Abgabe: 29. Oktober 2015, zu Beginn der Vorlesung

Jede Aufgabe gibt 4 Punkte, soweit nichts anderes vermerkt ist.

Aufgabe 1.1 Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie

$$f \in \mathrm{O}(g) \iff \exists c > 0 : \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < c \quad \text{und}$$
$$f \in \mathrm{o}(g) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Aufgabe 1.2 Ordnen Sie die folgenden Funktionen nach ihrem asymptotischen Wachstum.

$$n^2,\ 3^n,\ n!,\ n^{\log n},\ 7n \log n$$

Beweisen Sie, dass Ihre Ordnung richtig ist.

In der Vorlesung wurde das Maschinenmodell so definiert, dass Variablen nur Zahlen *polynomieller Größe* speichern können. In den folgenden beiden Übungen wird untersucht, was „möglich“ ist, wenn man auf diese Einschränkung verzichtet.

Aufgabe 1.3 *(4 Zusatzpunkte)* Zeigen Sie: Wenn in Variablen beliebig große Zahlen gespeichert werden können, kann man bei gegebenen N und K in $O(\log N)$ Schritten den Wert $\binom{N}{K}$ berechnen.
Hinweise:

- Überlegen Sie sich, wie man in $O(\log N)$ Schritten aus A und N den Wert A^N berechnen kann.
- Aus was besteht die Dezimaldarstellung von $(1000 + 1)^N$, wenn wir voraussetzen, dass $\binom{N}{\lfloor N/2 \rfloor} < 1000$ ist?

Aufgabe 1.4 *(4 Zusatzpunkte)*

a) Zeigen Sie, dass man mit Variablen unbeschränkter Größe in $O(\log^2 N)$ Schritten aus N den Wert $N!$ berechnen kann.
Hinweis: Aufgabe 1.3.

b) Zeigen Sie nun, dass man mit Variablen unbeschränkter Größe in $O(\log^3 N)$ Schritten einen echten Teiler von N finden kann (falls er existiert), also ein effizientes Faktorisierungsverfahren (`http://de.wikipedia.org/wiki/Faktorisierungsverfahren`) hat. — Sie dürfen ohne Beweis die Tatsache benutzen, dass der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen $\leq N$ in $O(\log N)$ Schritten gefunden werden kann.