

# Grundzüge der Theoretischen Informatik: Präsenzblatt 9

Beachten Sie: Die Präsenzblätter und -lösungen wurden von den Tutoren erstellt und können Fehler enthalten. Diese Blätter sind nicht für das Bestehen notwendig und dienen allein ihrer selbstständigen Übung.

**Hinweis:** Gehen Sie davon aus, dass alle Funktionen, welche in den Aufgabenstellungen verwendet werden, stets platz- und zeitkonstruierbar sind.

**Aufgabe 1.** (a) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion platzkonstruierbar ist:

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor := \max\{k \in \mathbb{N} \mid k^2 \leq n\}$$

Ist die Funktion auch zeitkonstruierbar?

(b) Im folgenden sind  $f, g$  zeit-/platzkonstruierbare Funktionen.

- Zeigen Sie:  $f + g$  ist zeit-/platzkonstruierbar.
- Zeigen Sie:  $f \cdot g$  ist zeit-/platzkonstruierbar.

**Aufgabe 2.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

1.  $\text{DSpace}(\log n) \subseteq \text{P}$
2.  $\text{DTime}(\log n) = \text{DSpace}(\log n)$
3.  $\text{NTime}(O(\log n)) = \text{DTime}(O(n^2))$
4.  $\text{NSpace}(3 \log n) \subseteq \text{DTime}(2^{O((\log n)^2)})$
5.  $\text{DTime}(2n^4) \subseteq \text{NSpace}(O(n^4))$
6. **Bonus:**  $\text{P} = \text{NP}$

**Hinweis:** Wenn Sie 6 zeigen oder widerlegen konnten, melden Sie sich bitte umgehend beim Lehrstuhl!

**Aufgabe 3.** In dieser Aufgabe geht es darum eine Folge von Zahlen nichtdeterministisch zu sortieren.

- (a) Gehen Sie davon aus, dass Ihnen eine (deterministische) Subroutine  $S$  zur Verfügung steht, die bei Eingabe  $n$  und  $m$  testet ob  $n \leq m$ . Konstruieren Sie damit eine nichtdeterministische Turingmaschine  $N$ , die den folgenden Spezifikationen genügt:
- $N$  erhält als Eingabe eine Sequenz von Zahlen in Binärdarstellung, getrennt durch das Zeichen  $\#$ .
  - Für jede gültige Eingabe terminiert jeder Berechnungspfad von  $N$  entweder in einem akzeptierenden oder in einem verwerfenden Zustand.
  - Für jede gültige Eingabe gibt es mindestens einen akzeptierenden Berechnungspfad.
  - Ist ein Berechnungspfad akzeptierend, steht auf Band 2 die (aufsteigend) sortierte Eingabesequenz.
  - Zahlen dürfen nur mit Hilfe von  $S$  miteinander verglichen werden.
  - In keinem Berechnungspfad darf  $S$  öfter als die Anzahl der Zahlen in der Eingabesequenz verwendet werden.

**Hinweis:** Wir bestehen auf die Verwendung von  $S$  um zu zählen, wie oft Ihre Turingmaschine zwei Zahlen vergleicht.

**Hinweis 2:** Sie dürfen Ihre Ergebnisse von Übungsblatt 8 benutzen.

- (b) Geben Sie die (asymptotische) Laufzeit ihrer Turingmaschine bzgl. der Anzahl der Verwendungen von  $S$  an.
- (c) Ist es möglich eine deterministische Turingmaschine zu konstruieren, die den selben Spezifikationen genügt?
- (d) **Bonus:** Beweisen Sie ihre Antwort aus Aufgabenteil (c).