Grundzüge der Theoretischen Informatik: Präsenzblatt 5

Beachten Sie: Die Präsenzblätter und -lösungen wurden von den Tutoren erstellt und können Fehler enthalten. Diese Blätter sind nicht für das Bestehen notwendig und dienen allein ihrer selbstständigen Übung.

Aufgabe 1. Welche der folgenden Mengen sind Indexmengen?
Welche sind entscheidbar?

1. $\{i \mid i \text{ ist eine Gödelnummer}\}$
2. $\{i \in im(\text{göd}) \mid \varphi_i(0) = 42 \land i < 1337\}$
3. $\{i \in im(\text{göd}) \mid \varphi_i \text{ ist Turing-berechenbar}\}$
4. $\{i \in im(\text{göd}) \mid \varphi_i \text{ ist For-berechenbar}\}$
5. $\{i \in im(\text{göd}) \mid \varphi_i \text{ ist total}\}$
6. $\{i \in im(\text{göd}) \mid \forall x \in \mathbb{N} : \varphi_i(x) = i\}$

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Es gibt eine Gödelnummer g mit

$$im(\varphi_g) = \{i \in im(\text{göd}) \mid \varphi_i(g) = g\}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie : H_0 ist RE-schwer, d.h. $\forall A \subseteq \mathbb{N} : A \in \mathsf{RE} \Rightarrow A \leq H_0$.

Aufgabe 4. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Sei $g_1, g_2, g_3, \cdots$ die aufsteigende Folge aller Gödelnummern.
   Es gibt ein $i \in \mathbb{N}$, so dass $\varphi_{g_i} = \varphi_{g_{i+1}}$.
2. Ihr Resultat bzgl. 1. ist unabhängig von der Gödelisierungsfunktion.
3. Es gibt nicht-triviale endliche Indexmengen.
4. Es gibt unendlich viele Indexmengen.
5. $\leq$ ist eine Ordungsrelation.

Hinweis: Jede Behauptung lässt sich in wenigen Zeilen beweisen bzw. widerlegen.