

Grundzüge der Theoretischen Informatik:

Präsenzblatt 4

Beachten Sie: Die Präsenzblätter und -lösungen wurden von den Tutoren erstellt und können Fehler enthalten. Diese Blätter sind nicht für das Bestehen notwendig und dienen allein ihrer selbstständigen Übung.

Aufgabe 1 (Wichtig). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- $REC \subseteq RE$
- $RE \subseteq REC$
- $A \leq B \wedge B \in REC \Rightarrow A \in REC$
- $A \leq B \wedge A \in REC \Rightarrow B \in REC$
- $A \leq B \wedge A \in RE \Rightarrow B \in RE$
- $A \leq B \wedge B \in RE \Rightarrow A \in RE$
- $A \leq B \wedge B \notin REC \Rightarrow A \notin REC$
- $A \leq B \wedge A \notin REC \Rightarrow B \notin REC$
- $A \leq B \wedge A \notin RE \Rightarrow B \notin RE$
- $A \leq B \wedge B \notin RE \Rightarrow A \notin RE$
- $A \leq B \Rightarrow \overline{A} \leq \overline{B}$
- $A \subseteq B \wedge B \in REC \Rightarrow A \in REC$

Können Sie ein Muster erkennen?

Aufgabe 2. Betrachten Sie die folgende Definition:

Definition 1. Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge.

- M heißt **finit**, g.d.w. M endlich ist.
- M heißt **co-finit**, g.d.w. \overline{M} finit ist.
- M heißt **infin**, g.d.w. M weder finit noch co-finit ist.

(a) Geben Sie Beispiele für eine finite, eine co-finite und eine infinite Menge an.

- (b) Zeigen Sie: $M \text{ finit} \Rightarrow M \in \text{REC}$.
- (c) Folgern Sie: $M \text{ co-finit} \Rightarrow M \in \text{REC}$.
- (d) Sei $D = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{im}(\varphi_{\text{göd}^{-1}(i)}) \text{ ist co-finit}\}$. Zeigen Sie: $D \notin \text{REC}$.
- (*) **Bonus:** Zeigen Sie: $D \notin \text{RE} \wedge \bar{D} \notin \text{RE}$.

Aufgabe 3. Seien A und B nicht-triviale, entscheidbare Mengen.

- (a) Zeigen Sie: $A \leq B \wedge B \leq A$.
- (b) Was, wenn A und/oder B trivial sind?

Aufgabe 4 (Zum Knobeln). Sei $\simeq \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})^2$ die folgende Relation:

$$A \simeq B :\Leftrightarrow A \leq B \wedge B \leq A$$

- (a) Zeigen Sie: \simeq ist eine Äquivalenzrelation.
- (b) Finden Sie möglichst viele Äquivalenzklassen von \simeq .
- (c) Beweisen Sie, dass die Äquivalenzklassen tatsächlich verschieden sind.

Hinweis: Ihr Tutor glaubt, dass Sie mindestens 6 verschiedene Äquivalenzklassen finden können.