6. Übungsblatt zu Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 14/15

Prof. Markus Bläser, M.Sc. Christian Engels
http://www-cc.cs.uni-sb.de/course/46/

Freitag, 19. Dezember 2014, 12:00 Uhr

Die Bearbeitung dieses Blattes ist freiwillig. Alle Punkte sind zusätzliche Punkte.

Aufgabe 6.1 (Arithmetische Hierarchie) Was können wir alles berechnen, wenn wir das Halteproblem berechnen könnten? Sei dazu $\texttt{WHILE}_1 = \texttt{WHILE}$. Nun erhalten wir $\texttt{WHILE}_{n+1}$ als die Menge der Programme, die nur $\texttt{WHILE}_n$-Befehle und zusätzlich folgendes Primitiv enthalten: $x_i := \chi_n(x_j, x_k)$, wobei

$$\chi_n(g,x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } g \text{ eine Gödelnummer eines } \texttt{WHILE}_n\text{-Programms ist und} \\ & \quad \text{auf Eingabe } x \text{ hält und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) *(1 Punkt)* Beschreiben Sie, wie $\texttt{WHILE}_n$-Programme gödelisiert werden können.

(b) *(1 Punkt)* Erläutern Sie, wie ein universelles $\texttt{WHILE}_n$-Programm aussieht.

(c) *(1 Punkt)* Sei

$$\Sigma_n = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \chi'_A \text{ ist } \texttt{WHILE}_n\text{-berechenbar}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\Sigma_1 = \mathsf{RE} \subsetneq \Sigma_2 \subsetneq \Sigma_3 \subsetneq \ldots$ gilt.

(d) *(1 Punkt)* Zeigen Sie, dass es Mengen $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $A \notin \bigcup_{c=1}^{\infty} \Sigma_c$ gibt.

Bemerkung: Mit $\Pi_n = \{\overline{A} \subseteq \mathbb{N} \mid A \in \Sigma_n\}$ und $\Delta_n = \Sigma_n \cap \Pi_n$ erhalten wir die *arithmetische Hierarchie*. Es gilt $\Delta_1 = \mathsf{REC}$, $\Sigma_1 = \mathsf{RE}$ und $\Pi_1 = \mathsf{co\text{-}RE}$. Des Weiteren ist $\Delta_{n+1} \supsetneq \Sigma_n \cup \Pi_n$, $\Sigma_n \neq \Pi_n$ und $\Sigma_n, \Pi_n \supsetneq \Delta_n$ für alle $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Aufgabe 6.2 Für ein String $x = x_1 x_2 \ldots x_n \in \{0,1\}^*$ sei $x^{\text{rev}} = x_n x_{n-1} \ldots x_1$. Ein String x heißt ein Palindrom, falls $x = x^{\text{rev}}$. Sei P die Menge aller Palindrome über $\{0,1\}^*$.

(a) *(2 Punkte)* Geben Sie eine 1-Band Turingmaschine an, die gestartet auf dem ersten Zeichen eines Strings w das erste und letzte Zeichen von w löscht, dann den Kopf wieder auf das erste Zeichen des verbleibenden Strings bewegt und in einem Zustand *ungleich* endet, wenn das erste und letzte Zeichen von w verschieden waren, und sonst in einem Zustand *gleich*. Geben Sie explizit ein Transitionsdiagramm an und erläutern Sie dieses.

(b) *(2 Punkte)* Konstruieren Sie mit Hilfe der Turingmaschine aus (a) eine 1-Band Turingmaschine, die P erkennt.

(c) *(2 Punkte)* Wie viele Schritte macht Ihre Turingmaschine ungefähr auf Palindrome der Länge n? Geht dies mit 2-Band-Turingmaschinen besser?

Aufgabe 6.3 (Kolmogorov-Komplexität (*)) (a) *(0 Punkte)* Lesen Sie das Kapitel über Kolmogorov-Komplexität.

(b) *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass jede 1-Band-Turingmaschine, die die Sprache P der Plaindrome erkennt, $\Omega(n)$ viele Schritte auf mindestens ein Palindrom der Länge n macht.

(c) *(1 Punkt)* Warum funktioniert der Beweis nicht mit 2-Band-Turingmaschinen.