5. Übungsblatt zu Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 14/15

Prof. Markus Bläser, M.Sc. Christian Engels
`http://www-cc.cs.uni-sb.de/course/46/`

Freitag, 28. November 2014, 12:00 Uhr

Aufgabe 5.1 Zeigen Sie: Es gibt eine Gödelnummer g mit $\operatorname{im} \varphi_g = \mathbb{N} \setminus \{g\}$.

Aufgabe 5.2 (6 Punkte) Welche der folgenden Mengen sind Indexmengen? Welche sind nicht-trivial. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $A = \{i \in \operatorname{im} \text{göd} \mid \varphi_i(0) = 1 \text{ und } i \leq 100000\}$

(b) $B = \{i \in \operatorname{im} \text{göd} \mid \varphi_i(42) = 42\}$

(c) $C = \{i \in \operatorname{im} \text{göd} \mid \varphi_i \text{ ist injektiv}\}$

(d) $D = \{i \in \mathbb{N} \mid i \text{ ist prim}\}$

(e) $E = \{i \in \operatorname{im} \text{göd} \mid i \text{ hält auf 0 in} \leq 10000 \text{ Schritten}\}$

(f) $F = \{i \in \operatorname{im} \text{göd} \mid \varphi_i \text{ ist WHILE-berechenbar}\}$.

Aufgabe 5.3 Sei $L = \{i \in \operatorname{im} \text{göd} \mid \operatorname{dom} \varphi_i \cap \operatorname{im} \varphi_i = \emptyset\}$.

(a) (1 Punkt) Ist L entscheidbar?

(b) (1 Punkt) Ist L rekursiv aufzählbar?

(c) (2 Punkte) Ist $\bar{L}$ rekursiv aufzählbar?

Aufgabe 5.4 Sei

$$X = \{i \in \operatorname{im} \text{göd} \mid \exists x \in \mathbb{N} : \varphi_i(x) = x\}.$$

(a) Beweisen Sie $X \notin \mathsf{REC}$, indem Sie das spezielle Halteproblem H_0 auf X reduzieren.

(b) Beweisen Sie $X \in \mathsf{RE}$, indem Sie X auf H_0 reduzieren.

Aufgabe 5.5 (Satz von Rice für RE ($\star$)) (3+1+2 Punkte)

(a) Sei I eine Indexmenge. Zeigen Sie: Ist I rekursiv aufzählbar, dann gibt es für jedes $g \in I$ ein $e \in I$ mit $\mathrm{dom}(\varphi_e) \subseteq \mathrm{dom}(\varphi_g)$ und $|\mathrm{dom}(\varphi_e)| < \infty$.

(b) Folgern Sie aus (a), dass $T = \{g \in \mathrm{im}(\text{göd}) \mid \varphi_g \text{ ist total}\}$ nicht rekursiv aufzählbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass auch $\overline{T}$ nicht rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 5.6 ($\star$)

(a) Gibt es für jede totale While-berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{im}\, f \subseteq \mathrm{im}\, \text{göd}$ einen Gödelnummer g, so daß

$$\varphi_g = \varphi_{f(g)} = \varphi_{f(f(g))}?$$