



4. Übungsblatt zu Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 14/15

Prof. Markus Bläser, M.Sc. Christian Engels
<http://www-cc.cs.uni-sb.de/course/46/>

Freitag, 21. November 2014, 12:00 Uhr

Aufgabe 4.1 Zeigen Sie, dass die Konkatenierungsfunktion $c : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, die jeweils zwei WHILE-Programmen P und Q die Gödelnummer von $P; Q$ zuweist, WHILE-berechenbar ist. (Es genügt auch, wenn die Gödelnummer g eines Programms zurück gegeben wird, das die gleiche Funktion wie $P; Q$ berechnet, d.h., wenn $\varphi_{\text{göd}(g)} = \varphi_{P;Q}$ gilt. In diesem Fall lässt sich c explizit angeben, ohne zuviel Schreiarbeit zu haben.)

Aufgabe 4.2 (Abschlusseigenschaften) Eine Menge M von Teilmengen der natürlichen Zahlen ist abgeschlossen unter Komplement (Schnitt, Vereinigung, Urbild unter WHILE-berechenbaren Funktionen), wenn für alle $A, B \in M$ und alle WHILE-berechenbaren Funktionen f gilt, dass \bar{A} ($A \cap B$, $A \cup B$, $f^{-1}(A) = \{b \mid f(b) \in A\}$) in M sind.

- (a) (2 Punkte) Untersuchen Sie, in wie weit REC unter Komplement, Schnitt, Vereinigung und Urbild unter WHILE-berechenbaren Funktionen abgeschlossen ist.
- (b) (2 Punkte) Untersuchen Sie, in wie weit RE unter Komplement, Schnitt, Vereinigung und Urbild unter WHILE-berechenbaren Funktionen abgeschlossen ist.

Aufgabe 4.3 In der Vorlesung haben wir im alternativen Beweis von Korollar 5.2 mittels Diagonalsierung eine charakteristische Funktion c konstruiert, die nicht WHILE-berechenbar ist. Dazu gehört eine Sprache

$$D = \{i \mid i \notin \text{im göd oder } \varphi_{\text{göd}^{-1}(i)}(i) \text{ ist gleich } 0 \text{ oder undefiniert}\}.$$

Zeigen Sie, dass das Halteproblem nicht entscheidbar ist, in dem sie $D \leq \bar{H}_0$ zeigen.

Zusatzaufgabe (0 Extrapunkte): Könnten Sie auch direkt $D \leq H_0$ zeigen?

Aufgabe 4.4 Es sei

$$N = \{i \mid i \in \text{im göd und } |\text{im } \varphi_{\text{göd}^{-1}(i)}| > 1\}$$

die Menge aller Gödelnummern von WHILE-Programmen, die eine Funktionen berechnen, die nicht konstant ist.

- (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass N nicht entscheidbar ist.
- (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass N rekursiv aufzählbar ist.