3. Übungsblatt zu Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 14/15

Prof. Markus Bläser, M.Sc. Christian Engels
http://www-cc.cs.uni-sb.de/course/46/

Freitag, 14. November 2014, 12:00 Uhr

Aufgabe 3.1 Sei $\mathbb{Z}[X]$ der Ring aller Polynome in einer Variablen X über den ganzen Zahlen und $\mathbb{Z}[[X]]$ die Menge aller formalen Potenzreihen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[X]$ abzählbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[[X]]$ überabzählbar ist.

Aufgabe 3.2 Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Denken Sie, dass die Aussage wahr ist, so reichen typischerweise zwei oder drei Sätze als Begründung aus. Andernfalls geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Jede charakteristische Funktion ist total.

(b) Jede charakteristische Funktion ist WHILE-berechenbar.

(c) Jede WHILE-berechenbare Funktion ist total.

(d) Jede FOR-berechenbare Funktion ist WHILE-berechenbar.

Aufgabe 3.3 (Berechenbare Bijektionen) Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Menge, die entscheidbar ist. Geben Sie eine WHILE-berechenbare Bijektion $g : A \to \mathbb{N}$ an, deren Umkehrfunktion ebenfalls WHILE-berechenbar ist.

Bemerkung: Setzen wir $A = \operatorname{im} \text{göd}$, so erhalten wir durch diese Aufgabe eine berechenbare Bijektion $g : \operatorname{im} \text{göd} \to \mathbb{N}$. Dann ist $\text{göd}' := g \circ \text{göd}$ eine bijektive Gödelnummerierung $\text{göd}' : \mathcal{W} \to \mathbb{N}$ der WHILE-Programme.

Aufgabe 3.4 (Rekursive Aufzählbarkeit) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen über Mengen $A \subseteq \mathbb{N}$ äquivalent sind:

(RE-A) A ist rekursiv aufzählbar.

(RE-B) Es gibt ein `WHILE`-Programm P mit $A = \operatorname{im}(\varphi_P)$.

(RE-C) Es gibt ein `WHILE`-Programm P mit $A = \operatorname{dom}(\varphi_P)$.

(RE-D) Es gibt ein `FOR`-Programm P mit $A = \operatorname{im}(\varphi_P)$ oder $A = \emptyset$.

Aufgabe 3.5 (Bijektion aus zwei Injektionen ($\star$)) Für endliche Mengen A und B gilt: Gibt es injektive Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to A$, dann ist $|A| \leq |B|$ und $|A| \geq |B|$. Also ist $|A| = |B|$, die beiden Mengen sind also gleich mächtig und es gibt eine bijektive Funktion von A nach B.

Zeigen Sie, dass dies auch für beliebige Mengen A und B gilt: Gibt es injektive Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to A$, dann gibt es auch eine bijektive Funktion $h : A \to B$.

Aufgabe 3.6 (($\star$)) Gibt es ein universelles FOR-Programm, d.h., ein FOR-Programm U, so dass für alle Gödelnummern i, die ein FOR-Programm P kodieren, und Eingaben $x \in \mathbb{N}$

$$\varphi_U(\langle i, x \rangle) = \varphi_P(x)$$

gilt?