1. Übungsblatt zu Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 14/15

Prof. Markus Bläser, M.Sc. Christian Engels
`http://www-cc.cs.uni-sb.de/course/46/`

Abgabefrist: Freitag, 31. Oktober 2014, 12:00 Uhr

Die korrekte Bearbeitung einer Aufgabe gibt vier Punkte soweit nicht anders vermerkt. Aufgaben, die mit einem Sternchen ($\star$) versehen sind, sind Zusatzaufgaben, durch deren korrekte Bearbeitung Sie Ihren Punktestand verbessern können.

Aufgabe 1.1 Zeigen Sie: Ein WHILE-Programm P ist genau dann in $\mathcal{W}_n$, wenn es durch $\leq n$ Anwendungen der Regeln 2.(a) und 2.(b) in Definition 2.1. aus einfachen Anweisungen generiert werden kann.

Aufgabe 1.2 (Syntaktischer Zucker) Wir schmecken die WHILE-Sprache mit syntaktischem Zucker ab. Simulieren Sie hierfür die folgenden Befehle durch Befehle der in der Vorlesung definierten WHILE-Sprache:

(a) *(1 Punkt)* $x_i := x_j \hat{}\, x_k$ (wobei $a \hat{}\, b$ die b-te Potenz von a bezeichnet).

(b) *(1 Punkt)* if $x_i = 0$ then P_1 else P_2.

(c) *(1 Punkt)* $x_i := x_j$ div x_k (wobei div die ganzzahlige Division bezeichnet).

(d) *(1 Punkt)* $x_i := x_j$ mod x_k (wobei mod die Modulo-Funktion bezeichnet).

Aufgabe 1.3 (Collatz-Vermutung) Die *Collatz-Vermutung* ist eine seit 1937 unbewiesene Vermutung über eine bestimmte Klasse von Folgen. Zu einem Startwert $a_0 \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die für $n \geq 0$ wie folgt rekursiv definiert ist:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n/2 & a_n \text{ gerade} \\ 3a_n + 1 & a_n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Setzen wir beispielsweise $a_0 = 6$, so erhalten wir die Folge

$$6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$$

Offensichtlich besteht diese Folge für $n \geq 6$ nur noch aus Wiederholungen des Zyklus $(4, 2, 1)$. Die Collatz-Vermutung besagt nun, dass es für *alle* positiven Startwerte $a_0 \in \mathbb{N}$ einen Index $s \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \geq s$ nur noch aus Wiederholungen des Zyklus $(4, 2, 1)$ besteht.

Nehmen Sie an, dass es ein Programm Z gibt, das als Eingabe WHILE-Programme P mit genau einer Eingabevariablen annimmt und zu jedem solchen P ausgibt, ob P die Nullfunktion berechnet. Z gibt also aus, ob $\varphi_P(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt.

Zeigen Sie, dass Sie dann die Collatz-Vermutung beweisen oder widerlegen können. *(Hinweis: Sie sollten hierfür ein syntaktisch korrektes WHILE-Programm P angeben und erklären, wieso das ausreicht. Sie sollten nicht versuchen, die Collatz-Vermutung ohne Annahme der Existenz von Z zu beweisen. Das könnte ≥ 74 Jahre dauern.)*

Aufgabe 1.4 (Funktionen) (a) *(1 Punkt)* Seien A, B, C beliebige Mengen, und seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ injektive Funktionen. Geben Sie eine injektive Funktion $h : A \to C$ an.

(b) *(2 Punkte)* Sei A eine beliebige, endliche Menge, und sei $f : A \to A$ eine Abbildung von A auf sich selbst. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (i) f ist injektiv.
- (ii) f ist surjektiv.
- (iii) f ist bijektiv.

(c) *(1 Punkt)* Zeigen Sie, dass die Äquivalenz in Aufgabenteil (b) nicht für Abbildungen $f : C \to C$ von unendlichen Mengen C auf sich selbst gilt.