12. Übungsblatt zu Grundzüge von Algorithmen und Datenstrukturen, WS 12/13

Prof. Dr. Markus Bläser, Radu Curticapean, Christian Engels
`http://www-cc.cs.uni-sb.de/course/38/`

Abgabe: Nie

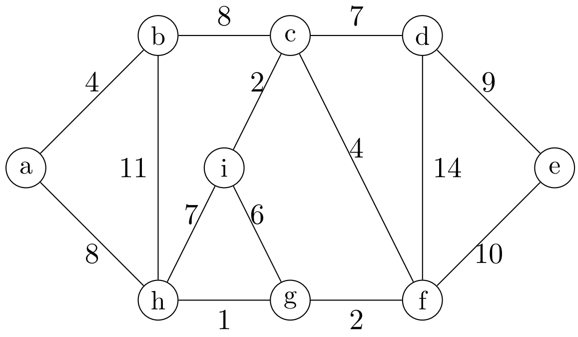


Abbildung 1

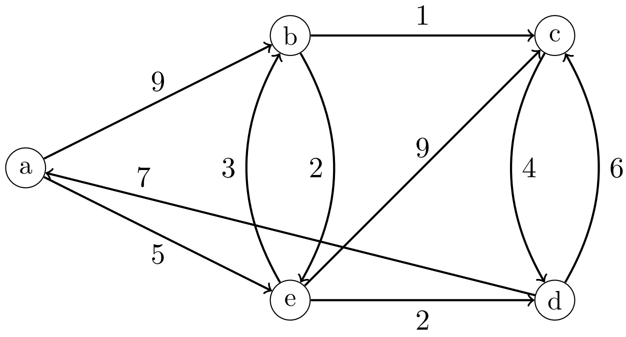


Abbildung 2

Aufgabe 12.1 Führen Sie Kruskals Algorithmus und Prims Algorithmus jeweils auf dem Graphen in Abbildung 1 aus. Fangen Sie mit Prims Algorithmus am Knoten a an.

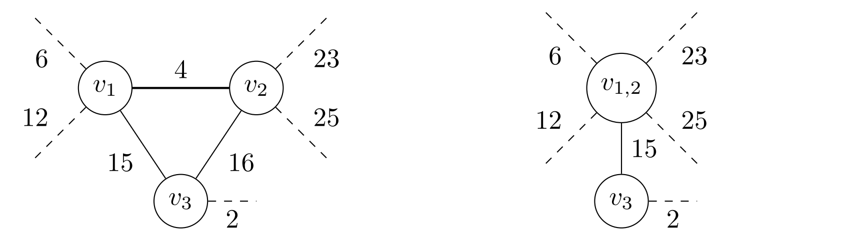
Aufgabe 12.2 Führen Sie Dijkstras Algorithmus zum Bestimmen kürzester Pfade auf dem Graphen in Abbildung 2 aus. Nutzen Sie als Startknoten den Knoten a.

Aufgabe 12.3 In dieser Aufgabe sollen Sie einen Algorithmus entwerfen, um die Länge eines kürzesten Pfades von u nach v für alle Paare $(u, v) \in V \times V$ in einem gerichteten Graphen $G = (V, E, w)$ zu finden ("all-pairs shortest path"). O.B.d.A. sei $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Es sei $a[i, k, j]$ die Länge eines kürzesten Pfades $(i, v_1, \ldots, v_t, j)$ von i nach j, so dass alle inneren Knoten $v_s \leq k$, $1 \leq s \leq t$, erfüllen.

a) Zeigen Sie:
$$a[i, 0, j] = \begin{cases} w(i, j) & \text{falls } (i, j) \in E \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Drücken Sie $a[i, k, j]$ durch $a[i', k-1, j']$ für geeignete i', j' aus.

c) Geben Sie unter Verwendung von a) und b) einen Algorithmus an, der das "All-pair shortest path"-Problem in Zeit $\mathrm{O}(n^3)$ löst. Beweisen Sie Laufzeit und Korrektheit.



(a) Die Kante mit Gewicht 4 ist lokal minimal

(b) Wir kontrahieren die Kante

Abbildung 3

Aufgabe 12.4 Sei $G = (V, E)$ ein gewichteter, zusammenhängender, ungerichteter Graph mit paarweise verschiedenen Kantengewichten. Wir bezeichnen eine Kante $\{u, v\}$ als *lokal minimal*, wenn alle anderen Kanten, die inzident mit u sind, größeres Gewicht haben oder alle Kanten, die inzident mit v sind, größeres Gewicht haben.

a) Zeigen Sie: Jede lokal minimale Kante gehört zu dem MST von G. (Nach Aufgabe 1 gibt es genau einen MST.)

b) Die Menge aller lokal minimalen Kanten eines Graphen ist eine Menge von Bäumen.

Boruvkas Algorithmus berechnet einen minimalen Spannbaum. Er besteht aus einer Reihe von Phasen. Eine Phase besteht aus einem Algorithmus, der folgendes leistet:

Schritt 1: Er bestimmt die Menge $L(G)$ aller lokal minimalen Kanten von G.

Schritt 2: Er berechnet den kontrahierten Graphen $G/L(G)$, wie in der Abbildung 3a) nach 3b) an einer Kante illustriert. Falls Mehrfachkanten entstünden, wird nur die Kante mit geringsten Gewicht behalten und die anderen entfernt.

Wir bezeichnen den aus G entstehenden Graph mit $B(G)$. Hat $B(G)$ mehr als einen Knoten, so wird eine weitere Phase mit $B(G)$ gestartet.

c) Implementieren Sie die Boruvka-Phase mit einer Laufzeit von $\mathrm{O}(m)$. Begründen Sie die Laufzeit.

d) Zeigen Sie, dass durch eine Boruvka-Phase die Anzahl der Knoten um mindestens die Hälfte reduziert wird.

e) Nutzen Sie Teilaufgabe c), um einen MST mit einer Laufzeit von $\mathrm{O}(m \log n)$ zu bestimmen. Um die Korrektheit Ihres Algorithmus zu zeigen, kann man z.B. zeigen, dass die Kanten in $L(G)$ und die Kanten eines MST von $B(G)$ einen MST von G bilden.