Prof. Dr. Markus Bläser, Radu Curticapean, Christian Engels
http://www-cc.cs.uni-sb.de/course/38/

Abgabe: Donnerstag, 17. Januar 2013, 12:00 Uhr

Aufgabe 9.1 Bestimmen Sie das asymptotische Wachstum der folgenden Funktionen so genau wie möglich.

a) $T(n) = 3T(n/3) + \frac{1}{3}n$

b) $T(n) = 3T(n/2) + \frac{2}{3}n$

c) $T(n) = 2T(n/3) + \frac{3}{2}n$

Aufgabe 9.2 *(Zusatzaufgabe)* In dieser Aufgabe betrachten wir eine das Master-Theorem verallgemeinernde Methode zum Lösen von Rekurrenzen. Hierfür genüge $T : [1, \infty) \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ der Gleichung[1]

$$T(x) = \begin{cases} \Theta(1) & 1 \leq x \leq x_0 \\ \sum_{i=1}^{k} a_i T(b_i x) + g(x) & x > x_0 \end{cases} \tag{1}$$

mit $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ und Konstanten $k \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ sowie $a_i > 0$ und $b_i \in (0, 1)$ für alle $1 \leq i \leq k$. Hierbei ist x_0 so gewählt, dass $x_0 \geq 1/b_i$ und $x_0 \geq 1/(1 - b_i)$ für alle $1 \leq i \leq k$ gilt.

Zudem fordern wir, dass g *poly-wachsend* ist. Diese technische Bedingung besagt, dass es $c_1, c_2 > 0$ gibt, so dass für alle $x \geq 1$, alle $1 \leq i \leq k$ und alle $u \in [b_i x, x]$ gilt:

$$c_1 g(x) \leq g(u) \leq c_2 g(x). \tag{2}$$

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

a) Es sei $p \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^p = 1$ erfüllt ist. Sie dürfen hierbei ohne Beweis annehmen, dass p existiert und eindeutig bestimmt ist. Zeigen Sie: Es gibt $c_3, c_4 > 0$, so dass für alle $1 \leq i \leq k$ und alle $x \geq 1$ gilt:

$$c_3 g(x) \leq x^p \int_{b_i x}^{x} \frac{g(u)}{u^{p+1}} du \leq c_4 g(x). \tag{3}$$

b) Zeigen Sie: Ist p wie in der vorigen Teilaufgabe gegeben, so gilt

$$T(x) = \Theta\left(x^p \left(1 + \int_1^x \frac{g(u)}{u^{p+1}} du\right)\right). \tag{4}$$

Hinweis: Partitionieren Sie $[1, \infty)$ in Intervalle $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wählen Sie hierbei $I_0 = [1, x_0]$ und $I_j = (x_0 + j - 1, x_0 + j]$ für $j > 0$. Zeigen Sie, dass aus $x \in I_j$ für alle b_i mit $1 \leq i \leq k$ folgt, dass $b_i x$ in einem Intervall $I_{j'}$ mit $j' < j$ enthalten ist. Nutzen Sie dies für einen Induktionsbeweis über die Intervalle I_n unter Rückgriff auf die vorige Teilaufgabe.

[1] Anders als beim Master-Theorem ist T eine Funktion, die als Eingaben *reelle* Zahlen erhält.

Aufgabe 9.3 Bestimmen Sie mithilfe von Aufgabe 9.2 das asymptotische Verhalten der Lösungen zu den folgenden Rekurrenzen. Geben Sie also jeweils eine Funktion f mit $T = \Theta(f)$ an.

a) $T(x) = 2T(x/4) + 3T(x/6) + \Theta(x \log x)$

b) $T(x) = 2T(x/2) + \frac{8}{9}T(3x/4) + \Theta(x^2/\log x)$

c) $T(x) = \frac{1}{2}T(x/2) + \Theta\left(\frac{1}{x}\right)$

Welche dieser Rekurrenzen könnte man auch mithilfe des Master-Theorems lösen?

Aufgabe 9.4 Wir betrachten eine Verallgemeinerung des Interval Scheduling Problem aus der Vorlesung. Die Intervalle haben nun neben Start- und Endzeiten zusätzlich Gewichte $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{N}$. Ziel ist es, eine Menge T von paarweise disjunkten Intervallen (ein sogenanntes "Schedule") zu finden, so dass $\sum_{i \in T} w_i$ maximal wird. Man erhält das Problem aus der Vorlesung, wenn man alle Gewichte gleich 1 setzt.

a) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem der Greedy-Algorithmus aus der Vorlesung nicht ein optimales Schedule findet.

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der basierend auf dynamischer Programmierung ein optimales Schedule findet.

Aufgabe 9.5 Gegeben seien n Prozesse $p_1, \dots, p_n$. Jeder dieser Prozesse benötigt t_i Zeit. Die Prozesse werden sequentiell ausgeführt und können nicht unterbrochen werden, d.h. die einzige Wahlmöglichkeit ist die Reihenfolge der Prozesse. Die Fertigstellungszeit c_i von p_i ist die Summe der Zeiten der Prozesse, die vor p_i ausgeführt werden plus t_i. Geben Sie einen Greedy-Algorithmus an, der die durchschnittliche Fertigstellungszeit $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i$ minimiert.