7. Übungsblatt zu Grundzüge von Algorithmen und Datenstrukturen, WS 12/13

Prof. Dr. Markus Bläser, Radu Curticapean, Christian Engels
http://www-cc.cs.uni-sb.de/course/38/

Abgabe: Donnerstag, 6. Dezember 2012, 12:00 Uhr

Aufgabe 7.1 Gegeben sei der in Abbildung 1 gezeichnete AVL-Baum. Die virtuellen Blätter sind in dieser Abbildung nicht gezeichnet und müssen von Ihnen ebenfalls nicht gezeichnet werden. Führen Sie die unten angegebenen Operationen auf dem Baum aus. Beachten Sie dabei die nachfolgenden zwei Punkte:

- Geben Sie jeweils den Baum nach dem Einfügen an und geben Sie die Werte für die Balancen an.
- Sollten Sie Einfach- oder Doppel-Rotationen brauchen, so geben Sie den Baum zusätzlich nach der Rotation mit den jeweiligen Balancen an.

a) Fügen Sie 14 ein.

b) Fügen Sie 16 ein.

c) Fügen Sie 18 ein.

d) Löschen Sie 13.

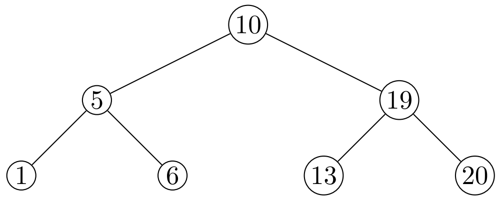

Abbildung 1: AVL-Baum

Aufgabe 7.2 Die Fibonacci-Zahlen wurden bereits in Aufgabe 4.4 definiert. Beweisen Sie die folgende geschlossene Formel der Fibonacci-Zahlen:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Hinweis: Stellen Sie die Rekurrenzgleichung der Fibonacci-Zahlen wie in Aufgabe 4.4 in Matrixform dar. Zerlegen Sie die entstandene Matrix geschickt. Vermeiden Sie auf diese Art einen langweiligen Induktionsbeweis, bei dem sie nichts lernen (außer Induktion).

Aufgabe 7.3 Es sei ein Binomialbaum B_k gegeben. Ein Postorder-Walk auf einem Baum funktioniert ähnlich wie ein Inorder-Walk. In dem Aufruf von `walk`(x) für Knoten x, rufen wir rekursiv zuerst das linke Kind mit `walk`(`Left`(x)) auf, sofern es existiert. Danach rufen wir das rechte Kind auf mit `walk`(`Right`(x)), sofern es existiert. Anschließend geben wir x aus. Die Reihenfolge der ausgegebenen Elemente induziert eine totale Ordnung $x_1, \ldots, x_n$ der Knoten des Baumes.

Nun weisen wir jedem Knoten x_t des Baumes die Binärdarstellung von t als Label zu. Sei nun ein Knoten x mit Label ℓ an der Tiefe i gegeben.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass ℓ genau $k - i$ Einsen besitzt.

b) (1 Punkt) Wieviele Bitstrings der Länge k gibt es, die genau $k-i$ Einsen erhalten?

c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der Grad von x gleich der Anzahl der Einsen rechts der rechtsgelegenen 0 in ℓ ist.

Aufgabe 7.4 a) Geben sind zwei AVL-Bäume T_1, T_2 mit jeweils maximal n Elementen. Alle Schlüssel in T_1 sind kleiner als alle Schlüssel in T_2. Geben Sie einen Algorithmus an, der die beiden Bäume in Laufzeit $\mathrm{O}(\log n)$ zu einem AVL-Baum zusammenfügt. Zeigen Sie die Laufzeit und die Korrektheit Ihres Algorithmus.

b) Gegeben sei ein Baum T. Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $\mathrm{O}(n)$ überprüft, ob T ein AVL-Baum ist. Zeigen Sie die Laufzeit und die Korrektheit Ihres Algorithmus.