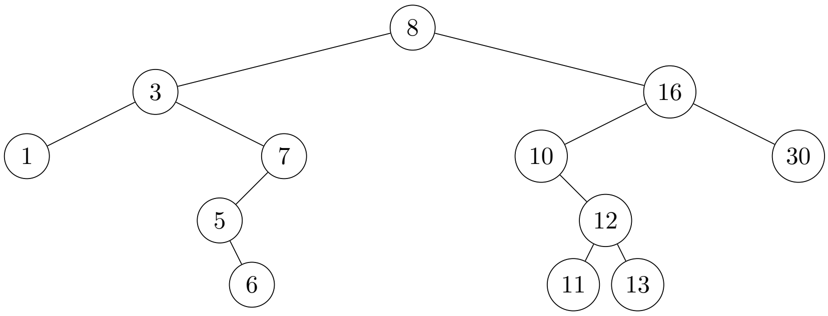
6. Übungsblatt zu Grundzüge von Algorithmen und Datenstrukturen, WS 12/13

Prof. Dr. Markus Bläser, Radu Curticapean, Christian Engels
`http://www-cc.cs.uni-sb.de/course/38/`

Abgabe: Donnerstag, 29. November 2012, 12:00 Uhr

Aufgabe 6.1 Führen Sie die folgenden Operationen auf dem dargestellten binären Suchbaum in der angegebenen Reihenfolge nacheinander aus und zeichnen Sie die dabei entstehenden Bäume:

- 8 löschen,
- 4 einfügen,
- 12 löschen,
- 12 einfügen,
- 9 einfügen.



Aufgabe 6.2 In dieser Aufgabe untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Quicksort und Binären Suchbäumen. Wir fügen n Elemente anhand einer gegebenen Permutation in einen anfangs leeren Binärbaum ein.

a) Geben Sie eine Permutation von n Elementen an, so dass die Tiefe des binären Suchbaums minimal ist. Begründen Sie ihre Wahl.

b) Geben Sie eine Permutation von n Elementen an, so dass die Tiefe des binären Suchbaums maximal ist. Begründen Sie ihre Wahl.

Im folgenden betrachten wir den binären Suchbaum T, den man erhält, wenn man in den leeren Baum die Pivotelemente in der Reihenfolge ihres Auftretens im Quicksort-Algorithmus einfügt.

Wir bezeichnen Quicksort-Aufrufe mit Strings in $\{0,1\}^*$. Dafür definieren wir den Quicksort-Aufruf über das ganze Array als den leeren String, ϵ. Gegeben nun ein aktueller Quicksort-Aufruf, bezeichnet durch x, so können wir die die nächsten rekursiven Aufrufe durch $x0$ bzw. $x1$ für die linke bzw. rechte Hälfte definieren. Wir bezeichnen die Pivotelemente die in Aufruf x gewählt werden als p_x. Sei $p_{x_1}, \dots, p_{x_r}$ die Pivotelemente lexikographisch nach den zugehörigen Strings $x_1, \dots, x_r$ sortiert. Wir fügen diese Elemente in der oben genannten Reihenfolge in einen leeren binären Suchbaum T.

Zeigen Sie:

c) Wenn T lineare Tiefe in n hat, dann hat Quicksort quadratische Laufzeit in n.

d) Wenn T logarithmische Tiefe in n hat, dann hat Quicksort Laufzeit $O(n \log n)$.

Aufgabe 6.3 In der Vorlesung wurde der Algorithmus von Blum, Floyd, Pratt, Rivest und Tarjan vorgestellt, der das kt-größte von n Elementen in $O(n)$ Schritten findet. Dieser Algorithmus hat die Eingabe zunächst in Fünfergruppen eingeteilt und diese Gruppen anschließend weiter verarbeitet.

Geben Sie an, welche Laufzeiten die folgenden Varianten des Algorithmus besitzen. Beweisen Sie Ihre Antworten.

a) Anstatt in 5er-Gruppen wird in 7er-Gruppen aufgeteilt.

b) Anstatt in 5er-Gruppen wird in 3er-Gruppen aufgeteilt.

Aufgabe 6.4 In einem zweidimensionalen Koordinatensystem sind n Punkte

$$P_1 = (x_1, y_1) \ \ldots \ \ P_n = (x_n, y_n)$$

gegeben. Die Punkte lassen sich als Standorte von Fabriken auffassen. Wir möchten im Folgenden eine zur x-Achse parallele Gerade g in das Koordinatensystem legen. Die Gerade lässt sich als Pipeline auffassen.

Der Abstand von P zu g sei wie üblich die Länge $d(P, g)$ des Lots von P auf g. Wir möchten g nun so wählen, dass $\sum_{i=1}^{n} d(P_i, g)$ minimal ist.

Geben Sie einen Algorithmus an, der g in Zeit $\mathrm{O}(n)$ findet. Die Eingabe ist hierbei das Array $[x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n]$. Beweisen Sie die Korrektheit und Laufzeit Ihres Algorithmus.

Aufgabe 6.5 (*Bonusaufgabe*) Wir betrachten Vergleichsbäume; um den Median / die beiden Mediane in einer Menge $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ zu suchen.[1]

a) *(1 Zusatzpunkt)* Zeigen Sie: Sind f und g Potentialfunktionen, so ist $f + g$ ebenfalls eine Potentialfunktion.

b) *(1 Zusatzpunkt)* Eine Menge $Y \subseteq X$ heißt *aufwärts abgeschlossen* bzgl. einer binären Relation R auf X, falls für alle $y \in Y$ und $z \in X$ gilt: Ist $(y, z) \in R$, so ist $z \in Y$. Für eine Menge $Y \subseteq X$ ist $\min_R(Y)$ die Menge der minimalen Elemente in Y bzgl. R eingeschränkt auf $Y \times Y$. Es sei $T = (V, E)$ nun ein Vergleichsbaum und die Funktion $a_Y : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch

$$a_Y(v) = \begin{cases} 2^{\# \min_{R_v}(Y)} & \text{falls } Y \text{ aufwärts abgeschlossen bzgl. } R_v \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass a eine Potentialfunktion ist.

c) *(1 Zusatzpunkt)* Zeigen Sie, dass

$$A(v) = \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ |Y| = \lceil \frac{|X|+1}{2} \rceil}} a_Y(v)$$

eine Potentialfunktion ist.

d) *(1 Zusatzpunkt)* Zeigen Sie, dass jeder Vergleichsbaum, der den Median in einer n-elementigen Menge findet, mindestens $\frac{3}{2}n - o(n)$ Vergleiche macht.

[1] Hiermit ist gemeint: Ist n ungerade, so suchen wir *den* eindeutig bestimmten Median. Ist n hingegen gerade, so möchten wir *die beiden* Elemente an den Positionen $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2} + 1$ der sortierten Version von X ausgeben.